De precieze broer van de significante cijfers

De echte foutenbeschouwing

Naar aanleiding van het artikel onder regie van Harrie Jorna in *NVOX* 7 over significante cijfers hebben enkele collega's gereageerd. Zij reageerden op het vermeende afleesprobleem en leggen uit hoe de schoolmethode van het rekenen met significante cijfers zich verhoudt tot een formele foutenbeschouwing.

■ **Jan Dijkstra** / Joodse Scholengemeenschap Maimonides, Amsterdam, **Sander Haemers** / Stanislascollege, Pijnacker en **Harrie Jorna** / eindredacteur nlt

Centraal in het artikel van Harrie Jorna[1] staat de vraag: hoe lees je een analoog apparaat af en hoe noteer je correct de afgelezen waarde? Bij een analoog apparaat met voldoende afstand tussen de streepjes en een goede manier om af te lezen kun je de afleesfout schatten op 1/10 deel van de afstand tussen twee opeenvolgende maatstreepjes.
Een aflezing van 12,34 zou dan genoteerd worden als 12,34 ± 0,01. Echter, de nauwkeurigheidstolerantie wordt niet alleen bepaald door de schaalverdeling. Voor bijvoorbeeld een 50 mL buret uit de nauwkeurigheidsklasse B is volgens de handleiding de tolerantie ± 0,1 mL, in dat geval noteren we 12,3 ± 0,1 mL. Bij dergelijke buretten zou niet om de 0,1 mL een streepje moeten staan, maar minder, bijvoorbeeld om de 0,5 mL om de vuistregel 'schatten tussen de maatstrepen' te rechtvaardigen. Voor eenzelfde buret uit de nauwkeurigheidsklasse A echter is de tolerantie ± 0,05 mL, in dat geval noteren we 12,34 ± 0,05 mL en is het reëel dat er maatstreepjes om de 0,1 mL staan.
Bij het verwerken van de meetresultaten moeten bovengenoemde fouten meegenomen worden in de berekeningen. In het voortgezet onderwijs rekenen we niet met fouten, maar met significante cijfers. Een klasse A-buret geeft een uitkomst in maximaal vier significante cijfers en een klasse B-buret in maximaal drie. In het voorgaande artikel[1] werd in de inleiding gesteld dat de rekenregels voor significante cijfers helder zijn. Maar deze regels blijken soms inconsequente resultaten op te leveren. Een voorbeeld: als we met behulp van *Binas* tabel 99 de relatieve molecuulmassa van C_{60} (buckminsterfullereen) uitrekenen, levert dat volgens de rekenregels voor vermenigvuldiging met een telwaarde een massa van $60 \cdot 12{,}01 = 720{,}6$. Echter wiskundig is vermenigvuldigen met 60 hetzelfde als zestig keer 12,01 optellen. Dat laatste levert volgens de rekenregels een massa van 720,60. Verschillende uitkomsten bij een eenzelfde wiskundige bewerking? Een goede aanleiding om de uitkomsten van de formele rekenregels te vergelijken met die van de schoolmethode van significante cijfers.



Een rekenliniaal, de voorganger van de rekenmachine.

Een stukje geschiedenis

Hoe is men gekomen tot de methode van de significante cijfers in het middelbaar onderwijs?
De overgang van de rekenliniaal naar de elektronische calculator is de oorzaak van de introductie van de methode van de significante cijfers. De rekenliniaal kwam, doordat hij afgelezen moest worden, niet verder dan de natuurlijke grens van drie cijfers significant. De calculator geeft echter tien cijfers weer. Leerlingen voelen haarfijn aan dat het overschrijven van de volledige display niet correct kan zijn en vragen vaak hoe er afgerond moet worden.
Bij het vwo-examen uit 1980 staat in het correctievoorschrift voor het eerst dat de uitkomst in overeenstemming

De eerste houten rekenmachine (1878) had een opgerolde logaritmische schaal van 12,7 m lang!
Foto: Paul Foeken.



moet zijn met de nauwkeurigheid van de verstrekte gegevens[2]. In 1986 wordt dat nader gepreciseerd: een uitkomst mag één cijfer meer of minder bevatten enzovoorts. In 1995 wordt dat: mag één significant cijfer meer of minder bevatten enzovoorts.

Rekenen in de formele methode

Hoe er gerekend moet worden met de meetwaarden en de bijbehorende fouten is rigoureus vastgelegd in de foutenbeschouwing. Een tweetal voorbeelden:
Voorbeeld 1: We lezen het verbruik uit een klasse A-buret af
(11,85 ± 0,05) - (11,73 ± 0,05) =
Hoe moet je de uitkomst hiervan noteren? In dit voorbeeld zou je denken dat de fout 0,05 + 0,05 = 0,10 zou zijn. Dit is de grootst mogelijke fout. Maar omdat toevallige fouten elkaar kunnen opheffen geldt volgens de statistiek:
Bij optellen/aftrekken worden de absolute fouten kwadratisch opgeteld, na worteltrekken wordt daarna de absolute fout verkregen:

$$s = \sqrt{(0,05)^2 + (0,05)^2} = 0,07$$

De fout wordt hierdoor dus kleiner dan de grootst mogelijk fout 0,10.
De uitkomst wordt dus 0,12 ± 0,07.

Voorbeeld 2: Een deling met fouten.
(15,33 ± 0,03) : (0,20 ± 0,03) =
Hoe moet je de uitkomst hiervan noteren?
Je zou kunnen denken dat de fout 0,03 : 0,03 = 1 is.
Maar dat het anders werkt is al te illustreren door de uitersten in mogelijke uitkomsten te berekenen: de maximale uitkomst is 15,36 : 0,17 = 90,35 en de minimale uitkomst is 15,30 : 0,23 = 66,52
Het verschil hiertussen is 23,8 en dat gedeeld door 2 levert ± 11,9. Dit lijkt al beter, maar deze berekende extreme waarde komt statistisch gezien niet zo vaak voor. De fout zal ook hier kleiner zijn. Volgens formele regels[3] geldt dat bij vermenigvuldigen/delen de relatieve fouten kwadratisch opgeteld moeten worden, na worteltrekken wordt dan de relatieve fout verkregen. Hieruit kan de absolute fout weer berekend worden.

$$s(\text{relatief}) = \sqrt{(0,03/15,33)^2 + (0,03/0,20)^2} = 0,15$$

s(absoluut) = 0,15 x 76,65 = 11
De fout wordt in één cijfer weergegeven, behalve als het eerste cijfer zoals hier een 1 of een 2 is. De uitkomst ronden we af op hetzelfde schaaldeel als in de fout. (Zie voorbeeld 1 en 2.)
De notatie van de uitkomst is dus 77 ± 11.
Voor een uitgebreide theoretische verhandeling over de foutenbeschouwing zie bijgaande literatuurverwijzing[3]. Er is ook veel vakliteratuur voor specialisten op dit gebied, bijvoorbeeld de publicatie NEN 1047: receptbladen voor de statische verwerking van waarnemingen uit 1967.

De bepaling is slecht overdacht en moet anders worden overgedaan

Voor het voortgezet onderwijs is de nlt-module *Meten en interpreteren*[4] geschikt. Volgens deze module geldt :

> Onthoud dat je bij vermenigvuldigen de relatieve fouten moet optellen om de relatieve fout in de uitkomst te bepalen.

In voorbeeld 2 leidt dit tot de relatieve fout (0,03/15,33) + (0,03/0,20) = 0,15 inderdaad in overeenstemming met de formele methode.

De methodes vergeleken

Bij vermenigvuldigen en delen rondt de schoolmethode af op het kleinste aantal significante cijfers in de gegevens. Aangezien het gegeven met de het kleinste aantal significante cijfers vrijwel altijd de grootste relatieve fout bezit, legt dit gegeven ook in de foutenbeschouwing het meeste gewicht in de schaal bij de bepaling van de fout en daarmee in het aantal significante cijfers in de uitkomst. Er zijn dus weinig verschillen te verwachten tussen de methodes wat betreft het aantal significante cijfers in de uitkomst.
Voorbeeld 1
(11,85 ± 0,05) - (11,73 ± 0,05) = 0,12 geeft volgens de schoolmethode eveneens 0,12.
Ook voorbeeld 2
(15,33 ± 0,03) : (0,20 ± 0,03) = 77 ± 11 levert volgens de schoolmethode 77.
Beide methoden geven in voorbeeld 1 en 2 de uitkomst dus in twee cijfers significant.
Bij optellen en aftrekken schrikken sommigen als in de schoolmethode het aantal significante cijfers in de uitkomst sterk wijzigt ten opzichte van de gegevens. In de hierna volgende voorbeelden zien we dat daartoe geen reden is.
Voorbeeld 3: Bij een titratie met een vloeistof van nauwkeurig bekende molariteit (0,1023 ± 0,0005 mol·L^{-1}) en een verbruik van 0,12 ± 0,07 mL (zie voorbeeld 1) wordt het aantal mol gereageerde titrant berekend door het volume te vermenigvuldigen met de molariteit. Beide methoden geven dezelfde uitkomst in twee cijfers significant:
(1,2 ± 0,7) ·10^{-5} mol en 1,2 ·10^{-5} mol.
De overgang van vier cijfers significant in de gegevens naar twee cijfers in de uitkomst is dus gerechtvaardigd. Maar de uitkomst heeft een grote relatieve fout en de bepaling is dus niet goed overdacht en moet op een andere manier worden overgedaan. Bijvoorbeeld met een tien maal zo zwakke titrant, zodat het aantal mL tien maal zo groot wordt en de fout daarin tien keer zo klein.

Voorbeeld 4: De berekening van de relatieve molecuulmassa van HI met *Binas* vmbo-kgt: We nemen aan dat de fout in de atoommassa's in beide gevallen ± 0,1 is. Dit levert
(126,9 ± 0,1) + (1,0 ± 0,1) = 127,9 ± 0,1.
De schoolmethode levert weer dezelfde uitkomst met hetzelfde aantal significante cijfers. De grote relatieve fout in de massa van H wordt weggepoetst door de kleine relatieve fout in de massa van I.

Voorbeeld 5: De berekening van de gemiddelde relatieve molecuulmassa van C_8H_{18}. De IUPAC lijst 20095 leert ons dat de relatieve atoommassa C : 12,011 ± 0,001 en voor H : 1,0080 ± 0,0001 allebei in vijf cijfers significant. De uitkomst wordt volgens de schoolmethode:
8 ·12,011 + 18 · 1,0080 = 114,232, dus in 6 cijfers significant.
De foutenbeschouwing leert ons echter dat

$$s = \sqrt{8^2 \cdot 0,001^2 + 18^2 \cdot 0,0001^2} = 0,008$$

De massa is dus 114,23 ± 0,008, dus in 5 cijfers significant. De schoolmethode geeft 1 cijfer teveel omdat bij het optellen de grens van 100 wordt overschreden.
Hoe zit het nu met het voorbeeld Buckminsterfullereen uit de eerste alinea?
Volgens de foutenbeschouwing mogen de fouten niet kwadratisch worden opgeteld omdat hier sprake is van eenzelfde meetwaarde met eenzelfde fout.
De absolute fout moet vermenigvuldigd

worden met een factor 60 en omdat de waarde ook met 60 wordt vermenigvuldigd blijft het aantal significante cijfers gelijk. De uitkomst wordt dus
60 (12,01 ± 0,01) = 720,6 ± 0,6.
De schoolmethode geeft dus de juiste uitkomst omdat de rekenregel voor telwaarden wordt toegepast.
Vergelijk Binas tabel 99 waarin alle relatieve atoommassa's in vier cijfers significant zijn gegeven en tabel 98 met de molaire massa's in vier cijfer significant zijn.

Conclusies

Iedereen beseft dat de foutenbeschouwing het echte werk is, maar te tijdrovend tijdens practica en toetsen. De schoolmethode van de significante cijfers kent een paar eenvoudige regels waardoor snel een verantwoord resultaat kan verkregen worden. De schoolmethode is soms iets ruwer dan de foutenbeschouwing maar voorkomt in ieder geval het klakkeloos overschrijven van de display.
Er zijn voorbeelden (zie voorbeeld 5) te verzinnen waarin de methoden één significant cijfer verschillen in de uitkomst. Hier houden de correctievoorschriften rekening mee.
Als men in het practicum alleen de afleesfout het aantal significante cijfers laat bepalen dan heeft de uitkomst misschien één *significant cijfer* teveel. Daar kan men de leerling bewust van maken zonder direct een complete foutenbeschouwing bij het verslag te eisen.

Noten

1. Harrie Jorna et al (2012). Aflezen en significante cijfers. *NVOX 37(7)*, 322-323.
2. Goedhart, M. J. en Verdonk, A.H. (1989). Significante cijfers bij rekenen en meten. *NVON maandblad (14)9*.
3. Derissen, J.L. (2008). *Dictaat foutenleer*. Universiteit Utrecht.
4. *Meten en interpreteren* (2009). Module Natuur Leven Technologie.
5. Wieser1, M.E. en Coplen, T.B. (2011). Atomic weights of the elements 2009. *Pure Appl. Chem. 83(2)* 359–396.



Jan Dijkstra *is vanaf 1975 werkzaam in het onderwijs en sinds 2010 bij het CvE.*

Sander Haemers *is vanaf 2005 werkzaam in het voortgezet onderwijs en mede-auteur van een aantal (nieuwe) scheikunde modules.*



Een leerling

Nogal aanwezig

Altijd als hij het lokaal betreedt, is hij er, meteen en helemaal, zonder kabaal, toch opvallend, en niet alleen, maar vergezeld van één of twee aantrekkelijke meisjes, waarmee hij de pauze aangenaam en gezellig heeft doorgebracht. Zijn lichaamstaal verwoordt een duidelijke boodschap: "Hier ben ik, zien jullie me?" Met scherp rondkijkende ogen in een smal, fijn getekend gezicht kijkt hij om zich heen en plaatst op het juiste moment een opmerking die de aandacht trekt, die aansluit op het gaande gesprek, een toespeling maakt op de aanwezige situatie of een wens inhoudt die voor hem de les aangenamer kan maken: "Gaan we snel aan de slag met de opgaven, dan kunnen we eerder weg!" Met een tevreden glimlach rond zijn lippen wacht hij mijn reactie af. Met een "Ga maar gauw zitten en pak je spullen!" negeer ik zijn voorstel. Vorige keer, vrijdagmiddag het laatste uur, mocht hij een kwartier eerder weg, daar gaan we geen gewoonte van maken.

Dan kan ìk eerder weg, bedoelt hij overigens. Hij ligt voor op de rest. Hij is van 5-vwo naar 5-havo gekomen en is vastbesloten zijn diploma te halen. Hij kan aardig lullen, maar als er gepoetst moet worden, is hij ook van de partij. In het intakeverslag staat dat hij ADHD heeft. Nou, als dat zo is, kan hij daar goed mee omgaan en die overtollige energie goed omzetten in het aanpakken van de leerstof. Hij kan slechts een korte klassikale instructie aan, wordt ongeduldig als anderen veel te vragen hebben, laat dat merken ook, maar kan daarna goed zelfstandig met de opdrachten aan de gang. Ineens staat hij opvallend onopvallend op om een prop in de prullenmand te gooien, geeft een maatje een vriendschappelijk stomp op de schouder en gaat weer aan het werk, gebruikt de antwoordenbundel op een volwassen manier, raakt dan in een kort en fel welles-nietes-gesprek met een buurman en toont dan weer geduld als hij één van zijn muzen met een begripsprobleempje kan helpen. Hij stoort, maar stoort niet echt, de anderen merken het, maar lijden er niet onder, hij is aanwezig en dat schijnt iedereen te moeten weten.

Hij is zelfverzekerd en toont zich tevreden met zichzelf. Uit zijn e-mailadres blijkt dat hij zichzelf best een mooie jongen vindt. En dat kan wel kloppen: een slank, atletisch postuur, heldere blauwe ogen in een fris, nog wat jongensachtig gezicht en de blonde haren zorgvuldig met gel in golven achterover geboetseerd. Goed gekleed met een merkspijkerbroekje om de smalle heupen met daarboven een jack met nepbontkraag vervoert hij zichzelf op een hippe scooter. In het weekend werkt hij achter de bar in de plaatselijke horeca. Hij vertrouwde mij een keer onder vier ogen toe, dat hij in de grote vakantie een vriendinnetje had gehad, maar dat was uit, dat ging niet.
Die bewuste vrijdagmiddag was hij helemaal niet meteen het schoolloze, vrije weekend tegemoet gesneld, naar zijn vrienden in een dorp ten noorden van Amsterdam. Toen ik een halfuur na school buiten kwam, was hij zoals zo vaak zittend op zijn scooter het middelpunt van een gezellig rokend en kwetterend groepje leerlingen, meest meisjes. School blijkt een belangrijk sociaal medium voor hem te zijn. Daar merken we 's ochtends minder van. Hij heeft een (in)slaapprobleem, blijkt uit de schoolannalen. Omstreeks bedtijd speelt wellicht de ADHD op en blijkt hij vaak hyperactief te zijn, hetgeen zich vertaalt in slecht slapen, zich verslapen, te laat komen of het eerste uur missen. Schuldbewust haalt hij meestal het gemiste in studie-uren of na school in.
Dit probleem staat redelijke studieresultaten niet in de weg. Hij is geen studiebol en gaat voor voldoendes, zes- en zeventjes. Hij is meer een doener dan een denker en heeft zich voor de horecaschool opgegeven. Hij slaagt met als gemiddeld eindcijfer precies een 6,5. Hij is tevreden, zijn ouders ook, en zij ook omdat er nu een duidelijk beroepsperspectief is. Hij gaat met een vriend op vakantie naar de Olympische Spelen in Londen. In het nieuwe schooljaar zien we hem nog regelmatig na school voor de school verschijnen, minder vaak is hij nog steeds aanwezig.

Hein Bruijnesteijn